

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|   |     |
|---|-----|
| Из предисловия к первому изданию . . . . .                              | 7   |
| Предисловие ко второму изданию . . . . .                                | 8   |
| <b>Глава I. Бесконечные множества</b>                                   |     |
| § 1. Операции над множествами . . . . .                                 | 9   |
| § 2. Взаимнооднозначное соответствие . . . . .                          | 13  |
| § 3. Счетные множества . . . . .  | 16  |
| § 4. Мощность континуума . . . . .                                      | 21  |
| § 5. Сравнение мощностей . . . . .                                      | 29  |
| <b>Глава II. Точечные множества</b>                                     |     |
| § 1. Предельная точка . . . . .   | 37  |
| § 2. Закрытые множества . . . . .                                       | 40  |
| § 3. Внутренние точки и открытые множества . . . . .                    | 46  |
| § 4. Расстояния и отделимость . . . . .                                 | 49  |
| § 5. Структура открытых и закрытых ограниченных множеств . . . . .      | 53  |
| § 6. Точки конденсации. Мощность замкнутого множества . . . . .         | 58  |
| <b>Глава III. Измеримые множества</b>                                   |     |
| § 1. Мера ограниченного открытого множества . . . . .                   | 63  |
| § 2. Мера ограниченного замкнутого множества . . . . .                  | 69  |
| § 3. Внешняя и внутренняя меры ограниченного множества . . . . .        | 73  |
| § 4. Измеримые множества . . . . .                                      | 77  |
| § 5. Измеримость и мера как инварианты движения . . . . .               | 82  |
| § 6. Класс измеримых множеств . . . . .                                 | 87  |
| § 7. Общие замечания о проблеме меры . . . . .                          | 92  |
| § 8. Теорема Витали . . . . .   | 94  |
| <b>Глава IV. Измеримые функции</b>                                      |     |
| § 1. Определение и простейшие свойства измеримой функции . . . . .      | 99  |
| § 2. Дальнейшие свойства измеримых функций . . . . .                    | 104 |
| § 3. Последовательности измеримых функций. Сходимость по мере . . . . . | 106 |
| § 4. Структура измеримых функций . . . . .                              | 113 |
| § 5. Теоремы Вейерштрасса . . . . .                                     | 119 |
| <b>Глава V. Интеграл Лебега от ограниченной функции</b>                 |     |
| § 1. Определение интеграла Лебега . . . . .                             | 126 |
| § 2. Основные свойства интеграла . . . . .                              | 131 |
| § 3. Предельный переход под знаком интеграла . . . . .                  | 138 |
| § 4. Сравнение интегралов Римана и Лебега . . . . .                     | 141 |
| § 5. Восстановление первообразной функции . . . . .                     | 146 |
| <b>Глава VI. Суммируемые функции</b>                                    |     |
| § 1. Интеграл неотрицательной измеримой функции . . . . .               | 150 |
| § 2. Суммируемые функции любого знака . . . . .                         | 159 |
| § 3. Предельный переход под знаком интеграла . . . . .                  | 166 |

## Глава VII. Функции, суммируемые с квадратом

|   |     |
|---|-----|
| § 1. Основные определения. Неравенства. Норма . . . . . | 180 |
| § 2. Сходимость в среднем . . . . .                     | 183 |
| § 3. Ортогональные системы . . . . .                    | 191 |
| § 4. Пространство $l_2$ . . . . .                       | 201 |
| § 5. Линейно независимые системы . . . . .              | 209 |
| § 6. Пространства $L_p$ и $l_p$ . . . . .               | 213 |

## Глава VIII. Функции с конечным изменением. Интеграл Стильтьеса

|   |     |
|---|-----|
| § 1. Монотонные функции . . . . .   | 221 |
| § 2. Отображение множеств. Дифференцирование монотонной функции . . . . . | 224 |
| § 3. Функции с конечным изменением . . . . .                              | 234 |
| § 4. Принцип выбора Хелли . . . . .                                       | 240 |
| § 5. Непрерывные функции с конечным изменением . . . . .                  | 243 |
| § 6. Интеграл Стильтьеса . . . . .  | 248 |
| § 7. Предельный переход под знаком интеграла Стильтьеса . . . . .         | 254 |
| § 8. Линейные функционалы . . . . .                                       | 258 |

## Глава IX. Абсолютно непрерывные функции. Неопределенный интеграл Лебега

|  |     |
|--|-----|
| § 1. Абсолютно непрерывные функции . . . . .   | 262 |
| § 2. Дифференциальные свойства абсолютно непрерывных функций . . . . .                   | 265 |
| § 3. Непрерывные отображения . . . . .   | 267 |
| § 4. Неопределенный интеграл Лебега . . . . .  | 271 |
| § 5. Замена переменной в интеграле Лебега . . . . .                                      | 281 |
| § 6. Точки плотности. Аппроксимативная непрерывность . . . . .                           | 285 |
| § 7. Добавления к теории функций с конечным изменением и интегралов Стильтьеса . . . . . | 288 |
| § 8. Восстановление первообразной функции . . . . .                                      | 292 |

## Глава X. Сингулярные интегралы. Тригонометрические ряды. Выпуклые функции

|  |     |
|--|-----|
| § 1. Понятие сингулярного интеграла . . . . .                                | 298 |
| § 2. Представление функции сингулярным интегралом в заданной точке . . . . . | 302 |
| § 3. Приложения в теории рядов Фурье . . . . .                               | 308 |
| § 4. Дальнейшие свойства тригонометрических рядов и рядов Фурье . . . . .    | 316 |
| § 5. Производные Шварца и выпуклые функции . . . . .                         | 323 |
| § 6. Единственность разложения функции в тригонометрический ряд . . . . .    | 335 |

## Глава XI. Точечные множества в двумерном пространстве

|   |     |
|---|-----|
| § 1. Замкнутые множества . . . . .                                | 347 |
| § 2. Открытые множества . . . . .                                 | 349 |
| § 3. Теория измерения плоских множеств . . . . .                  | 353 |
| § 4. Измеримость и мера как инварианты движения . . . . .         | 361 |
| § 5. Связь меры плоского множества с мерами его сечений . . . . . | 367 |

## Глава XII. Измеримые функции нескольких переменных и их интегрирование

|   |     |
|---|-----|
| § 1. Измеримые функции. Распространение непрерывных функций . . . . . | 372 |
| § 2. Интеграл Лебега и его геометрический смысл . . . . .             | 376 |
| § 3. Теорема Фубини . . . . .   | 379 |
| § 4. Перемена порядка интегрирований . . . . .                        | 385 |

|   |     |
|---|-----|
| <b>Глава XIII. Функции множества и их применения в теории интегрирования</b>      |     |
| § 1. Абсолютно-непрерывные функции множества . . . . .                            | 388 |
| § 2. Неопределенный интеграл и его дифференцирование . . . . .                    | 394 |
| § 3. Обобщение полученных результатов . . . . .                                   | 397 |
| <b>Глава XIV. Трансфинитные числа</b>   |     |
| § 1. Упорядоченные множества. Порядковые типы . . . . .                           | 401 |
| § 2. Вполне упорядоченные множества . . . . .                                     | 406 |
| § 3. Порядковые числа . . . . .   | 410 |
| § 4. Трансфинитная индукция . . . . .   | 413 |
| § 5. Второй числовой класс . . . . .  | 414 |
| § 6. Алефы . . . . .  | 416 |
| § 7. Аксиома и теорема Цермело . . . . .  | 418 |
| <b>Глава XV. Классификация Бэра</b>   |     |
| § 1. Классы Бэра . . . . .  | 422 |
| § 2. Непустота классов Бэра . . . . .   | 427 |
| § 3. Функции 1-го класса . . . . .  | 433 |
| § 4. Полунепрерывные функции . . . . .  | 443 |
| <b>Глава XVI. Некоторые обобщения интеграла Лебега</b>                            |     |
| § 1. Введение . . . . .   | 452 |
| § 2. Определение интеграла Перрона . . . . .                                      | 453 |
| § 3. Основные свойства интеграла Перрона . . . . .                                | 455 |
| § 4. Неопределенный интеграл Перрона . . . . .                                    | 458 |
| § 5. Сравнение интегралов Перрона и Лебега . . . . .                              | 461 |
| § 6. Абстрактно заданный интеграл и его обобщение . . . . .                       | 465 |
| § 7. Узкий интеграл Данжуа . . . . .  | 471 |
| § 8. Теорема Г. Хаке . . . . .  | 474 |
| § 9. Теорема П. С. Александрова — Г. Ломана . . . . .                             | 481 |
| § 10. Понятие о широком интеграле Данжуа . . . . .                                | 486 |
| <b>Глава XVII. Функции с неограниченными областями задания</b>                    |     |
| § 1. Мера неограниченного множества . . . . .                                     | 489 |
| § 2. Измеримые функции . . . . .  | 491 |
| § 3. Интегралы по неограниченным множествам . . . . .                             | 492 |
| § 4. Функции, суммируемые с квадратом . . . . .                                   | 493 |
| § 5. Функции с конечным изменением. Интегралы Стилтjеса . . . . .                 | 495 |
| § 6. Неопределенные интегралы и абсолютно непрерывные функции множества . . . . . | 498 |
| <b>Глава XVIII. Некоторые сведения из функционального анализа</b>                 |     |
| § 1. Метрические и, в частности, линейные нормированные пространства . . . . .    | 501 |
| § 2. Компактность . . . . .   | 508 |
| § 3. Условия компактности в некоторых пространствах . . . . .                     | 513 |
| § 4. Банаховский „принцип неподвижной точки“ и некоторые его приложения . . . . . | 530 |
| <b>Добавления</b>   |     |
| I. Длина дуги кривой . . . . .  | 541 |
| II. Пример Штейнгауза . . . . .   | 545 |
| III. Некоторые дополнительные сведения о выпуклых функциях . . . . .              | 547 |
| <b>Дополнения</b>   |     |
| Теорема Хаусдорфа . . . . .   | 553 |